数理解析研究所講究録
952巻 1996年 67-81

Stable map-germ of corank 1 の $\Sigma^{n-p+1,\underbrace{1,\cdots,1}_{k}}$ $(k=0,1,2,3,4)$ について

東工大 友延 政彦 (Masahiko Tomonobu)

導入

genericな写像芽 $f:\mathbb{C}^n,0\to\mathbb{C}^p,0$ $(n\geq p)$ に対し、Thom-Boardman特異点集合 $\Sigma^{n-p+1}f$, $\Sigma^{n-p+1,1}f$, $\Sigma^{n-p+1,1,1}f$, $\cdots$ を考える。これらの集合は滑らかだが、その閉包は特異点を持ちうることが知られている。この論文で我々は、fをcorank 1の安定写像芽として $\Sigma^{n-p+1}f$, $\Sigma^{n-p+1,1}f$, $\cdots$, $\Sigma^{n-p+1,1,1,1,1}f$ の desingularizationを構成する。

$n\leqq p$の場合には、[1]でGaffneyがgenericなfに対し$\Sigma^1 f$, $\cdots$ $\Sigma^{1,1,1,1}f$ のdesingularizationをつくった。彼の論文ではベクトル束や準同型が局所的に定義されていて、なぜそれらが大域的に定義されるのかはっきりしていない。[4]でTurnbullは、より自然なベクトル束や準同型がどのように構成されるかを示し、それを用いて$\Sigma^1 f$, $\cdots$, $\Sigma^{1,1,1,1}$だけでなく$\Sigma^{1,1,1,1,1}f$(ただし$\Sigma^1\cup\Sigma^2$上)のdesingularizationを作った。

一方、$n \geqq p$の場合における$\overline{\Sigma}^{n-p+1}f$, $\overline{\Sigma}^{n-p+1,1}f$のdesingularizationは、Rongaの$\overline{\Sigma}^{i}f$, $\overline{\Sigma}^{i,j}f$に関する結果[3]によって作られている。しかし、$\overline{\Sigma}^{n-p+1,1,1}f$, $\overline{\Sigma}^{n-p+1,1,1,1}f$, … に対するdesingularizationは知られていない。

我々のdesingularizationを作るために、我々はTurnbullがつくった道具を使い、[1][2][3][4]に見られるようなよく知られたdesingularizationを作るための方法に従う。我々の場合、fは$f : \mathbb{C}^n, 0 \to \mathbb{C}^p, 0$ $(n \geqq p)$でcorank 1の安定写像芽とする。すると、fの特異点集合Cは滑らかで次元$p-1$となり、同型$e : \mathbb{C}^{p-1}, 0 \to C, 0$がとれる。そこでこの方法を$e$と$f$の合成写像$f \circ e : \mathbb{C}^{p-1}, 0 \to \mathbb{C}^p, 0$に適用する。これを可能にする命題を§2で述べる。しかしこの写像$f \circ e$はある種の対称性をもっているので、より多くの工夫が要る。それを、desingularizationを構成する§3以降で述べる。

Ronga, GaffneyとTurnbullは、desingularizationをThom-Boardman特異点集合の閉包のThom多項式の計算に使った。我々のdesingularizationもこの目的に使いうる。

我々の結果は複素の場合に述べるが、実の場合にも成り立つ。

§1 Turnbull の高次微分

この節では、我々の desingularization の構成に使われる Turnbull の高次微分をまとめて書く。くわしくは Turnbull [4] を見よ。

1以上の整数 r に対し、$S_r(\mathbb{C}^n)=\mathbb{C}^n\oplus\mathbb{C}^n\odot\mathbb{C}^n\oplus\cdots\oplus\overset{r}{\odot}\mathbb{C}^n$ とおく。ただし、$\odot$ は対称積を表わし、$\overset{k}{\odot}\mathbb{C}^n$ で k 重対称積を表わす。$v_1,\cdots,v_k\in\mathbb{C}^n$ に対し $v_1\cdots v_k=1/k!\sum_{\sigma\in\Sigma_k}(v_{\sigma(1)}\otimes\cdots v_{\sigma(k)})\in\overset{k}{\odot}\mathbb{C}^n$ とおく。ここで、Σ_k は k 次の対称群を表わす。$C_{i_1\cdots i_t}$ で、$\sum_{k=1}^{t}i_k$ 個の元をもつ集合の、$i_1,\cdots,i_t$ 個の元をもつ集合たちへの異なる分割の総数を表わすことにする。

$\mathbb{C}^n$ の開集合 U 上の正則写像 $f:U\longrightarrow\mathbb{C}^m$ の点 $x\in U$ での r 回高次微分 $S_r(f):S_r(\mathbb{C}^n)\longrightarrow S_r(\mathbb{C}^m)$ を、

$$S_r(f)=\left(\sum_{i=1}^{r}f_i\,,\ \sum C_{i_1i_2}f_{i_1}f_{i_2}\,,\ \cdots,\ f_1^{\,r}\right)$$

で定義する。ここで、f_i は f の x における通常の i 回微分であり、k 番目の和は $\{i_1,\cdots,i_k\ ;\ i_1+\cdots+i_k\leqq r,\ 1\leqq i_1\leqq\cdots\leqq i_k\}$ の上でとり、そして $f_{i_1}\cdots f_{i_k}$ は $\overset{i_1+\cdots+i_k}{\odot}\mathbb{C}^n$ に作用する。

この定義は、うまく chain rule $S_r(g)\circ S_r(f)=S_r(g\circ f)$ が成立するようになされている。chain rule は、合成写像の通常の高次微分についての Faá de Bruno の公式、

$$(g\circ f)_r=g_1(f_r)+\sum C_{i_1i_2}g(f_{i_1i_2})+\cdots+g_r(f_1^{\,r})$$

を用いて示される。

chain rule が成り立つと chart のはり合わせがうまくゆき、次が成立する。

<u>命題</u>

i) 多様体M^nに対し、fibre が $S_r(\mathbb{C}^n)$ で、M の chart の任意の組 (U,ψ), (V,φ) に対し変換写像 $S_r(\varphi\circ\psi|_{U\cap V}^{-1})$ をもつ M 上のベクトル束 T_rM が存在する。

ii) 多様体 M_1^n, M_2^m と正則写像 $f: M_1\to M_2$ に対し、局所的には $S_r(f)$ で与えられる束準同型 $T_rf: T_rM_1 \to T_rM_2$ が存在する。

iii) 多様体 M_1^n, M_2^m, M_3^l と正則写像 $f:M_1\to M_2$, $g:M_2\to M_3$ に対して、$T_r(g\circ f)=T_rg\circ T_rf$ が成立する。

iv) 多様体 M に対して、ベクトル束たちの自然な包含たち $T_1M \hookrightarrow T_2M \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow T_rM \hookrightarrow \cdots$ が存在する。さらに、$T_{r-1}M$ を包含 $T_{r-1}M\hookrightarrow T_rM$ によりその像と同一視したとき、任意の正則写像 $f: M\to N$ に対して $T_rf|_{T_{r-1}M} = T_{r-1}f$ が成立する。

最後に、T_rM の部分束同士をかけ算をするために、写像 $\sigma: T_rM \longrightarrow T_rM\otimes T_rM$ を

$$\sigma(v_1\cdots v_s)=\sum (v_{i_1}\cdots v_{i_t})\otimes(v_{i_{t+1}}\cdots v_{i_s})$$

で定義する。(ここに、$\{i_1,\cdots,i_s\}=\{1,\cdots,s\}$ であり、和は

$\{1,\dots,s\}$ の、互いに交わらず空でない部分集合 $\{i_1,\dots,i_t\}$ と $\{i_{t+1},\dots,i_s\}$ $(1\leqq t\leqq \frac{s}{2})$ へのすべての分割の上でとる。) これは明らかではないが よく定義されている。

§2 $\Sigma^{n-p+1,1,\dots,1}f$ の特徴付け.

この節では、$f:\mathbb{C}^n,0\to\mathbb{C}^p,0$ $(n\geqq p)$ を corank 1 で T-B generic (即ち、すべての Thom-Boardman 特異点に横断的な正則写像芽) とし、これに対し $\Sigma^{n-p+1,\underbrace{1,\dots,1}_{k}}f$ を特徴付ける。

命題

$n\geqq p$ とする。$f:\mathbb{C}^n,0\to\mathbb{C}^p,0$ を corank 1 で T-B generic な写像芽とする。すると f の特異点集合 C は次元 $p-1$ の滑らかな多様体となり同型 $e:\mathbb{C}^{p-1},0\to C,0$ がとれる。このとき、$\Sigma^{n-p+1,\underbrace{1,\dots,1}_{k}}f=\Sigma^{\underbrace{1,\dots,1}_{k}}(f\circ e)$ が成立する。

ここで我々は $g=f\circ e$ とおき f の代わりに g を考える。g について (source の次元)$\leqq$(target の次元) となる。

命題

f, e, g を上のものとする。さらに $0\in\Sigma^1(g)$ を仮定する。すると、もし $0\in\Sigma^{\underbrace{1,\dots,1}_{k}}g$ であるならば、曲線 $c:\mathbb{C},0\to\mathbb{C}^{p-1},0$ で $1\leqq i\leqq k$ なる任意の整数 i に対し $\frac{d^i}{dt^i}(g\circ c)(0)=0$ をみたすものが存在する。かつ、逆も成り立つ。

これから Faà de Bruno の公式(§1)を使い、次の特徴付けをうる。

i) $x\in\mathbb{C}^{p-1}$ が $x\in\Sigma^{1}g$ であるための必要十分条件は、

$$g_1(v_1)=0 \qquad \cdots ①$$

をみたす0でない $v_1\in T_x\mathbb{C}^{p-1}$ が定数倍を除いて一意に存在することである。

ii) $x\in\Sigma^{1}g$ が $x\in\Sigma^{1,1}g$ であるための必要十分条件は、上の①の v_1 に加えて

$$g_1(v_2)+g_2(v_1^2)=0 \qquad \cdots ②$$

をみたす0でない $v_2\in T_x\mathbb{C}^{p-1}$ が存在することである。

iii) $x\in\Sigma^{1,1}g$ が $x\in\Sigma^{1,1,1}g$ であるための必要十分条件は、上の①, ②の v_1, v_2 に加えて

$$g_1(v_3)+3g_2(v_1,v_2)+g_3(v_1^3)=0 \qquad \cdots ③$$

をみたす0でない $v_3\in T_x\mathbb{C}^{p-1}$ が存在することである。

iv) $x\in\Sigma^{1,1,1}g$ が $x\in\Sigma^{1,1,1,1}g$ であるための必要十分条件は、上の①, ②, ③の v_1, v_2, v_3 に加えて

$$g_1(v_4)+4g_2(v_1,v_3)+3g_2(v_2^2)+6g_3(v_1^2,v_2)+g_4(v_1^4)=0 \qquad \cdots ④$$

をみたす0でない $v_4\in T_x\mathbb{C}^{p-1}$ が存在することである。

(i)からiv)において、g_i は g の x における通常の i 回微分を表わす。)

§3 $\Sigma^{n-p+1}f$, $\Sigma^{n-p+1,1}f$ の desingularizations

この節から我々の desingularization の構成を始める。

以下の節を通して、$f:\mathbb{C}^n,0\longrightarrow\mathbb{C}^p,0\ (n\geqq p)$ を corank I で安定な正則写像芽とする。

まず、f の特異点集合 $C=\Sigma^{n-p+1}f$ となり、さらにこの集合は次元 $p-1$ の滑らかな多様体となる。そこで同型 $e:\mathbb{C}^{p-1},0\longrightarrow C,0$ をとり、この $\mathbb{C}^{p-1}$ を $\Sigma^{n-p+1}f$ の desingularization と呼ぶことにする。この $\mathbb{C}^{p-1}$ を $\tilde{\Sigma}^{n-p+1}f$ とかく。

次に、$\Sigma^{n-p+1,1}f$ を考える。以下この節でベクトル束は、必要に応じて引き戻し $\tilde{\Sigma}^{n-p+1}f$ 以上のものを考える。

$T_1\tilde{\Sigma}^{n-p+1}(f)$ を ξ_1 とかくことにする。ξ_1 の直線からなる Grassmannian を $G_1(\xi_1)$ とかく。$G_1(\xi_1)$ 上には、その fibre が $G_1(\xi_1)$ の点に対応する直線からなる toatological 直線束 ξ_1' がとれる。

$T_1\mathbb{C}^p$ を η_1 とかく。今、$T_1 g=T_1(f\circ e)$ は rank 一定なので、その像からなるベクトル束 ζ_0 がとれる。$\tilde{\Sigma}^{n-p+1}f$ 上で $T_1 g:\xi_1\longrightarrow\zeta_0\subset\eta_1$ となる。これを制限することで、束準同型 $\xi_1'\longrightarrow\zeta_0$ をうる。これより $G_1(\xi_1)$ 上のベクトル束 $Hom(\xi_1',\zeta_0)$ の切断面が誘導される。

この切断面の零点集合の点において、ξ_1' は $T_1 g$ の核の中に入る。$\tilde{\Sigma}^{n-p+1,1}f$ をこの切断の零点集合とする。$\Sigma^{n-p+1,1}f$ の

点の引き戻しの上では、$T_1 g$ の核は一意的な直線となる。そこで、$\tilde{\Sigma}_0^{n-p+1,1}f$ を、$\xi_1 = \ker T_1 g$ となる $\tilde{\Sigma}^{n-p+1,1}f$ の点の部分集合とする。

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Hom}(\xi_1, \tau_0) \arrow[d] \\
\tilde{\Sigma}_0^{n-p+1,1}f \arrow[r, hook] & \tilde{\Sigma}^{n-p+1,1}f \arrow[r, hook] & G(\xi_1) \arrow[u, dashed, bend right, "\Phi_1"'] \arrow[d, "\pi_1"] \\
 & & \tilde{\Sigma}^{n-p+1}f
\end{tikzcd}
$$

<u>定理</u>

$e \circ \pi_1 : \tilde{\Sigma}^{n-p+1,1}f \longrightarrow \bar{\Sigma}^{n-p+1}f$ が定義され、これは $\bar{\Sigma}^{n-p+1,1}f$ の desingularization となる。

次の節のために、$\tilde{\Sigma}^{n-p+1,1}f$ の双対を作る。ε^1 を自明な直線束とし、$\xi_1^* = \mathrm{Hom}(\xi_1, \varepsilon^1)$, $\tau_0^* = \mathrm{Hom}(\tau_0, \varepsilon^1)$ とおく。$\tilde{\Sigma}^{n-p+1}f$ 上に Grassmannian $G_1(\tau_0^*)$ が、さらにその上に tautological 直線束 τ_0^{*1} がとれる。$T_1 g : \xi_1 \to \tau_0$ から $G_1(\tau_0^*)$ 上の束 $\mathrm{Hom}(\tau_0^{*1}, \xi_1^*)$ の切断 Φ_1^* が誘導される。$\tilde{\Sigma}^{n-p+1,1}f^*$ をこの切断の零点集合とする。

<u>定理</u>

$e \circ \pi_1^* : \tilde{\Sigma}^{n-p+1,1}f^* \longrightarrow \bar{\Sigma}^{n-p+1}f$ が定義され、これは $\bar{\Sigma}^{n-p+1,1}f$ の desingularization となる。さらに埋め込み

$\pi_1^{*-1}\circ\pi_1$ に $\tilde{\Sigma}_0^{n-p+l,1}f \longrightarrow \tilde{\Sigma}^{n-p+l,1}f^*$ は自然に同型 $\overline{(\pi_1^{*-1}\circ\pi_1)}$: $\tilde{\Sigma}^{n-p+l,1}f \to \tilde{\Sigma}^{n-p+l,1}f^*$ へ拡張される。

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\xi_1,\tau_0) \arrow[d, hook, "\Phi_1"] & & & \mathrm{Hom}(\tau_0^{*\prime},\xi_1^*) \arrow[d, hook', "\Phi_1^*"'] \\
G_1(\xi_1) \arrow[r, hook'] \arrow[drr, "\pi_1"'] & \tilde{\Sigma}^{n-p+l,1}f \arrow[r, "\overline{\pi_1^{*-1}\circ\pi_1}", "\sim"'] & \tilde{\Sigma}^{n-p+l,1}f^* & G_1(\tau_0^*) \arrow[l, hook'] \arrow[dl, "\pi_1^*"] \\
& & \tilde{\Sigma}^{n-p+l}f &
\end{tikzcd}
$$

このとき、τ_0 と $\tau_0^*=\mathrm{Hom}(\tau_0,\varepsilon)$ の間の自然な pairing により $\tau_0^{*\prime}\subset\tau_0^*$ から定義される τ_0 の超平面部分束を τ_1 とかくことにする。

§4 $\overline{\Sigma}^{n-p+l,1,1}f$ の desingularization

この節でベクトル束は、必要に応じて引き戻して $\tilde{\Sigma}^{n-p+l,1}f$ 上のものを考える。

ξ_1' の定義より $T_1g(\xi_1')=\{0\}$。一方、τ_1 の定義より $T_1g(\xi_1)\subset\tau_1$。従って準同型 $T_1g:\xi_1/\xi_1'\longrightarrow\tau_1$ をうる。Thom-Boardman 特異点の定義より、この準同型の $\tilde{\Sigma}^{n-p+l,1}f$ 上の退化集合は $e\circ\pi_1$ により $\Sigma^{n-p+l,1}f$ の外、$\bigcup_{i>1}\Sigma^{n-p+l,i}$ の中へ写ることに注意する。

ξ_2 を σ による $\xi_1\circ\xi_1'$ の逆像とする。$\xi_1'\subset\ker T_2g$ より T_2g は ξ_2 を η_1 の中へ写し、さらに τ_0 の中へ写すことがわかる。$\xi_1'\subset\xi_1\subset\xi_2$ と、$T_2g|\xi_1=T_1g$ より、準同型 $T_2g:\xi_2/\xi_1'\longrightarrow\tau_0$ が

考えられる。§2の $\Sigma^{n-p+1,1,1}f$ の特徴付けの式②より、
$\hat{\Sigma}_0^{n-p+1,1}f$ におけるこの準同型の退化集合が $\rho\circ\pi_1$ により
$\Sigma^{n-p+1,1,1}f$ に同型に写ることがわかる。ところが上の注意より、
$T_1 g = T_2 g : \xi_1/\xi_1 \longrightarrow \tau_1 \subset \tau_0$ は非退化だったので、
$\hat{\Sigma}_0^{n-p+1,1}f$ における、合成

$$\xi_2/\xi_1 \xrightarrow{T_2 g} \tau_0 \longrightarrow \tau_0/\tau_1$$

により定義される準同型 Φ_2 の退化集合が $\rho\circ\pi_1$ で $\Sigma^{n-p+1,1,1}f$ に同型に写ることがわかる。

$\hat{\Sigma}^{n-p+1,1}f$ 上準同型 Φ_2 により誘導される $\mathrm{Hom}(\xi_2/\xi_1, \tau_0/\tau_1)$ の切断を Ψ_2 とおく。Ψ_2 の零点集合を $\hat{\Sigma}^{n-p+1,1,1}f$ とし、また
$\hat{\Sigma}_0^{n-p+1,1,1}f = \hat{\Sigma}^{n-p+1,1,1}f \cap \hat{\Sigma}_0^{n-p+1,1}f$ とおく。

$$\begin{tikzcd}
\hat{\Sigma}_0^{n-p+1,1,1}f \arrow[r, hook] \arrow[dr, hook] & \hat{\Sigma}^{n-p+1,1,1}f \arrow[drr, hook] & & \mathrm{Hom}(\xi_2/\xi_1, \tau_0/\tau_1) \arrow[d, shift left] \\
& \hat{\Sigma}_0^{n-p+1,1}f \arrow[rr, hook] & & \hat{\Sigma}^{n-p+1,1}f \arrow[u, shift left, "\Psi_2"']
\end{tikzcd}$$

<u>定理</u>

$\rho\circ\pi_1 : \hat{\Sigma}^{n-p+1,1,1}f \longrightarrow \Sigma^{n-p+1,1,1}f$ が定義され、これは
$\Sigma^{n-p+1,1,1}f$ の desingularization となる。

§5 $\Sigma^{n-p+1,1,1,1}f$ の desingularization

この節でベクトル束は、必要に応じて引き戻して $\hat{\Sigma}^{n-p+1,1,1}f$
$(\subset X)$ 上のものを考える。

まず前節と同様に、$T_3 g(\xi_1') = \{0\}$ で、$\hat{\Sigma}_0^{n-p+1,1,1}f$ 上では準同型 $T_3 g : \xi_1/\xi_1' \longrightarrow \tau_1$ は非退化となる。また前節より $\hat{\Sigma}^{n-p+1,1,1}f$ 上では $T_3 g(\xi_2) \subset \tau_1$ となる。

ζ_3 を σ による $\xi_1' \circ \xi_2$ の逆像とする。$\xi_1' \subset \ker T_3 g$ より $T_3 g$ は ζ_3 を η_1 の中へ、さらに τ_0 の中へ写すことがわかる。
同型 $\rho_3 : \zeta_3/\xi_2 \xrightarrow{\sim} \xi_1' \circ (\xi_2/\xi_1')$ を、合成

$$\zeta_3/\xi_2 \xrightarrow[\sim]{\sigma} \xi_1' \circ \xi_2/\xi_1' \circ \xi_1' \xrightarrow{\sim} \xi_1' \circ (\xi_2/\xi_1')$$

で定義する。このとき、§2 の $\Sigma^{n-p+1,1,1,1}f$ の特徴付けの式③および②より、図式

$$\begin{array}{ccccc} \xi_1' \circ (\xi_2/\xi_1') & \xrightarrow{id \otimes T_2 g} & \xi_1' \circ \tau_0 & \longleftrightarrow & \xi_1' \circ \tau_1 \\ \wr\big\uparrow \rho_3 & & & & \oplus \\ \zeta_3/\xi_2 & \xrightarrow{T_3 g} & \tau_0 & \longrightarrow & \tau_0/\tau_1 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}}\right\} = \eta_3$$

により定義される準同型 $\phi_3 : \zeta_3/\xi_2 \longrightarrow \eta_3$ の $\hat{\Sigma}_0^{n-p+1,1,1}f$ における退化集合が $e \circ \pi_1$ で $\Sigma^{n-p+1,1,1,1}f$ に同型に写ることがわかる。

ζ_3/ξ_2 の直線からなる Grassmannian を $G_1(\zeta_3/\xi_2)$ とかき、$G_1(\zeta_3/\xi_2)$ 上の toatological 直線束 $(\zeta_3/\xi_2)'$ をとる。準同型 ϕ_3 から誘導される $G_1(\zeta_3/\xi_2)$ 上のベクトル束 $\mathrm{Hom}((\zeta_3/\xi_2)', \eta_3)$ の切断を Φ_3 とする。この切断 Φ_3 の零点集合を $\hat{\Sigma}^{n-p+1,1,1,1}f$ とおき、$(\zeta_3/\xi_2)' = \ker \phi_3$ となる $\hat{\Sigma}^{n-p+1,1,1,1}f$ の点からなる部分集合を $\hat{\Sigma}_0^{n-p+1,1,1,1}f$ とする。

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Hom}((\zeta_3/\xi_2)', \eta_3) \arrow[d, shift right] \\
\widetilde{\Sigma}_0^{n-p+1,1,1,1}f \arrow[r, hook] & \widetilde{\Sigma}^{n-p+1,1,1,1}f \arrow[r, hook] & G_1(\zeta_3/\xi_2) \arrow[u, dashed, shift right, "\Phi_3"'] \arrow[d, "\pi_3"] \\
 & & \widetilde{\Sigma}^{n-p+1,1,1}f
\end{tikzcd}$$

<u>定理</u>

$\rho\circ\pi_1\circ\pi_3 : \widetilde{\Sigma}^{n-p+1,1,1,1}f \longrightarrow \Sigma^{n-p+1,1,1,1}f$ が定義され、これは $\Sigma^{n-p+1,1,1,1}f$ の desingularization となる。

このとき、§3で行ったのと同様に、今つくった $\widetilde{\Sigma}^{n-p+1,1,1,1}f$ の双対 $\widetilde{\Sigma}^{n-p+1,1,1,1}f^*$ が作られる。これに対し§3の2番目の定理と同様の事が成り立ち、さらに $\widetilde{\Sigma}^{n-p+1,1,1,1}f$ 上、Φ_3 の像からなるベクトル束 τ_3 ($\subset \eta_3$) が得られる。

<u>§6 $\Sigma^{n-p+1,1,1,1,1}f$ の desingularization</u>

この節の前半でベクトル束は、必要に応じて引き戻し $\widetilde{\Sigma}^{n-p+1,1,1,1}f$ (以上)上のものを考える。

まず前節同様、$T_4 g(\xi_1')=\{0\}$, $T_4 g(\xi_2)\subset \tau_1$ で、$\widetilde{\Sigma}_0^{n-p+1,1,1,1}f$ 上では $T_4 g : \xi_1/\xi_1' \longrightarrow \tau_1$ は非退化であることに注意する。

ξ_2^2 を図式

$$\begin{tikzcd}
\zeta_3/\xi_2 \arrow[r, "\rho_3", "\sim"'] & \xi_1'\bullet(\xi_2/\xi_1') & \xi_1'\bullet\xi_2 \arrow[l, two heads] \arrow[r, mapsto, "(\xi_1')^{\perp}\otimes"] & \xi_2 \\
(\zeta_3/\xi_2)' \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] \arrow[rrr, mapsto, dashed] & & & \xi_2^2 \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90]
\end{tikzcd}$$

で定義し、ξ_3 を

$$\xi_3 = \sigma^{-1}(\xi_1^1 \circ \xi_2^2)$$

で定義する。

このとき $\xi_1^1 \subset \xi_2^2 \subset \xi_2 \subset \xi_3 \subset \zeta_3$ となり、前節の内容及び、ξ_2^2 と ξ_3 の定義より、$T_4 g(\xi_2^2) = \{0\}$ となり、また $\tilde{\Sigma}_0^{n-p+1,1,1,1}f$ 上で $\phi_3 : \zeta_3/\xi_3 \longrightarrow \tau_3\ (\subset \eta_3)$ は非退化となることに注意する。

ζ_4 を σ による $\xi_1^1 \circ \xi_3 + \xi_2^2 \circ \xi_2^2$ の逆像とする。準同型 $\rho_4 :$ $\zeta_4/\zeta_3 \longrightarrow \xi_1^1 \circ (\xi_3/\xi_2)$ を図式

$$\begin{tikzcd}
\zeta_4/\zeta_3 \arrow[r, "\sigma"] \arrow[ddr, "\rho_4"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & (\xi_1^1 \circ \xi_3 + \xi_2^2 \circ \xi_2^2)/\xi_1^1 \circ \xi_2 \arrow[d] \\
 & (\xi_1^1 \circ \xi_3 + \xi_2^2 \circ \xi_2^2)/(\xi_1^1 \circ \xi_2 + \xi_2^2 \circ \xi_2^2) \arrow[d, "\wr"] \\
 & \xi_1^1 \circ (\xi_3/\xi_2)
\end{tikzcd}$$

で定義する。ρ_4 は同型とは限らないことに注意する。

このとき §2の $\Sigma^{n-p+1,1,1,1}f$ の特徴付けの式④および③より、図式

$$\begin{tikzcd}
\xi_1^1 \circ (\xi_3/\xi_2) \arrow[r, "id \otimes T_3 g"] & \xi_1^1 \circ \tau_0 & \xi_1^1 \circ \tau_1 \arrow[l] \\
\zeta_4/\zeta_3 \arrow[u, "\rho_4"] \arrow[r, "T_4 g"] & \tau_0 \arrow[r] & \tau_0/\tau_1
\end{tikzcd}$$

$$\left.\begin{array}{c} \xi_1^1 \circ \tau_1 \\ \oplus \\ \tau_0/\tau_1 \end{array}\right\} = \eta_3 \longrightarrow \eta_3/\tau_3$$

で定義される準同型の $\tilde{\Sigma}_0^{n-p+1,1,1,1}f$ における退化集合が $\rho \circ \pi_1 \circ \pi_3$ により $\Sigma^{n-p+1,1,1,1}f$ に同型に写されることがわかる。

以前の節と同様に事を進めたいが、f_4が同型とは限らないため、一度余分なblowing-upを要する。

$\varphi_4=(\varphi_4, T_4\varphi):\zeta_4/\zeta_3\longrightarrow\xi'_1\odot(\xi_3/\xi_2)\oplus\tau_0/\tau_1$ とする。

$G_1(\{\xi'_1\odot(\xi_3/\xi_2)\oplus\tau_0/\tau_1\}^*)$ を $\{\xi'_1\odot(\xi_3/\xi_2)\oplus\tau_0/\tau_1\}^*$ の直線からなるGrassmannianとし、その上のtoatological直線束を $(\xi'_1\odot(\xi_3/\xi_2)\oplus\tau_0/\tau_1)^{*1}$ とする。φ_4から誘導されるこのGrassmannian上の $Hom(\{\xi'_1\odot(\xi_3/\xi_2)\oplus\tau_0/\tau_1\}^{*1},(\zeta_4/\zeta_3)^*)$ の切断をΦ_4とし、その零点集合を $\overset{\approx}{\Sigma}{}^{n-p+1,1,1,1}f$ とし、$\ker\varphi_4=\{\xi'_1\odot(\xi_3/\xi_2)\oplus\tau_0/\tau_1\}^{*1}$ となる点の部分集合を $\overset{\approx}{\Sigma}{}_{\circ}^{n-p+1,1,1,1}f$ とおく。

$$
\begin{tikzcd}
 & Hom(\{\xi'_1\odot(\xi_3/\xi_2)\oplus\tau_0/\tau_1\}^{*1},(\zeta_4/\zeta_3)^*) \arrow[d, shift right] \\
\overset{\approx}{\Sigma}{}^{n-p+1,1,1,1}f \arrow[r, hook] & G_1(\{\xi'_1\odot(\xi_3/\xi_2)\oplus\tau_0/\tau_1\}^*) \arrow[u, dashed, shift right, "\Phi_4"'] \arrow[d, "\pi"] \\
 & \tilde{\Sigma}^{n-p+1,1,1,1}f
\end{tikzcd}
$$

<u>定理</u>

$\overset{\approx}{\Sigma}{}^{n-p+1,1,1,1}$ は滑らかで、$\pi:\overset{\approx}{\Sigma}{}^{n-p+1,1,1,1}f\longrightarrow\tilde{\Sigma}^{n-p+1,1,1,1}f$ が定義され、これはmodificationとなる。

ここから、ベクトル束は $\overset{\approx}{\Sigma}{}^{n-p+1,1,1,1}f$ (以)上のものを考える。

$\overset{\approx}{\Sigma}{}^{n-p+1,1,1,1}f$ 上 $((\xi'_1\odot(\xi_3/\xi_2))\oplus(\tau_0/\tau_1))^{*1}$ から定義されるφ_4の像からなる束をλ_4とする。準同型 $\phi_4:\lambda_4\longrightarrow\eta_3/\tau_3$ を

$$\lambda_4 \xrightarrow{(id\otimes T_3 g)\oplus id} \eta_3 \longrightarrow \eta_3/\lambda_3$$

で定義する。ϕ_4から定義される$\tilde{\tilde{\Sigma}}^{n-p+1,1,1,1}f$上のベクトル束$Hom(\lambda_4, \eta_3/\lambda_3)$への切断を$\Phi_4$とかき、その零点集合を$\tilde{\Sigma}^{n-p+1,1,1,1,1}f$とかく。$\tilde{\Sigma}_0^{n-p+1,1,1,1,1}f = \tilde{\Sigma}^{n-p+1,1,1,1,1}f \cap \tilde{\Sigma}_0^{n-p+1,1,1,1}f$とする。

$$\begin{array}{ccc} & & Hom(\lambda_4, \eta_3/\lambda_3) \\ & & \downarrow\uparrow \Phi_4 \\ \tilde{\Sigma}^{n-p+1,1,1,1,1}f & \hookrightarrow & \tilde{\tilde{\Sigma}}^{n-p+1,1,1,1}f \end{array}$$

定理

$\rho\circ\pi_1\circ\pi_3\circ\pi : \tilde{\Sigma}^{n-p+1,1,1,1,1}f \to \bar{\Sigma}^{n-p+1,1,1,1,1}f$が定義され、これは$\bar{\Sigma}^{n-p+1,1,1,1,1}f$の desingularization となる。

参考文献

[1] T. Gaffney, "The Thom Polynomial of $\bar{\Sigma}^{1,1,1,1}$"; Proceedings of Symposia in Pure Maths vol. 40 (1983) part I, 399–408.

[2] I.R. Porteous, "Simple singularities of maps"; Proc. Liverpool Singularities Sympos. I, Springer Lecture Notes, vol. 192 (1971) 286–307.

[3] F. Ronga, "Le calcul des classes duales aux singularités de Boardman d'ordre 2"; Comment Math. Helv. 47 (1972), 15–35.

[4] R.J.H.A. Turnbull, "The Thom-Boardman singularities $\Sigma^1, \Sigma^{1,1}, \Sigma^{1,1,1}, \Sigma^{1,1,1,1}, \Sigma^{1,1,1,1,1}$ and their closures"; Thesis, Univ. of Liverpool (1989).